

Chapter 2

流形上的积分

2.1 积分与Stokes公式

2.1.1 积分

前面几节我们讨论了如何在流形上做微分, 本节开始, 我们将讨论如何在流形上做积分. 与定义微分的方式相似, 我们首先定义在局部上的积分, 然后再推广到整个流形上.

对 $\forall f \in C^\infty(M)$, 定义 $\text{supp}(f) := \overline{\{x \in M : f(x) \neq 0\}}$, 若 $\exists U_\alpha$, s.t. $\text{supp}(f) \subset U_\alpha$. 这样一来, f 在 U_α 上的积分即为在 $\text{supp}(f)$ 上的积分.

此时尝试定义积分

$$\int_M f := \int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_\alpha^{-1}(x)) dx_\alpha^1 dx_\alpha^2 \cdots dx_\alpha^n. \quad (2.1)$$

该定义主要的思路是将 U_α 映到欧氏空间中, 再对 $f \circ \phi_\alpha^{-1}$ 在欧氏空间积分. $dx_\alpha^1 dx_\alpha^2 \cdots dx_\alpha^n$ 是标准多元微积分中的积分符号.

如果上述定义是良好的, 那么在不同坐标卡下的积分结果应当相同. 考虑坐标变换, 即在另一个坐标卡 U_β 上积分, 设 $\text{supp}(f) \subset U_\alpha \cap U_\beta$, 由多元微积分的知识(换元), 有

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_\beta^{-1}(x)) dx_\beta^1 dx_\beta^2 \cdots dx_\beta^n = \int_{\mathbb{R}^n} f(\phi_\alpha^{-1}(x)) |\det \phi_{\beta\alpha}| dx_\alpha^1 dx_\alpha^2 \cdots dx_\alpha^n. \quad (2.2)$$

这说明不同坐标卡下的积分不相同, 差一个 $|\det \phi_{\beta\alpha}|$ 项.

注意到 $\det \phi_{\beta\alpha}$ 恰好是 $\Lambda^n T^*M$ 的转移函数. 即

$$dx_\beta^1 \wedge \cdots \wedge dx_\beta^n = \det(\phi_{\beta\alpha}) dx_\alpha^1 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n.$$

所以如果所有的 $\det \phi_{\beta\alpha} > 0$, 将(2.1)中的 $dx^1 \cdots dx^n$ 替换为 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$, 即可使(2.1)在局部上是良定义的.

但一般来说, $\det \phi_{\beta\alpha} > 0$ 不一定恒成立, 我们称存在覆盖 M 的坐标卡集 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, 使得 $\det \phi_{\beta\alpha} > 0$ 恒成立的流形叫做可定向流形.

定义 2.1.1. 如果 M 上存在一个坐标卡覆盖 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$, s.t. 对 $\forall U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \det \phi_{\beta\alpha} > 0$, 我们称 M 是可定向的(oriented).

注: 莫比乌斯带与射影平面均为不可定向流形。

习题 2.1.2. 通过球极投影证明 S^n 是可定向流形。

本讲义中, 若无特殊说明, 流形均为可定向的.

若 M 可定向, 对 $\forall U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset, \det \phi_{\beta\alpha} > 0$. 由 $\Lambda^* T^* M$ 的构造, $\exists$ 处处不为0的 n -形式(不唯一). 该 n -形式称为流形 M 的一个体积元(volume form), 记为 dv , 也称为 M 的一个定向.

对于定向流形, 积分定义在 n -形式上比定义在光滑函数上更自然. 对 $\forall \eta \in C^\infty(M, \Lambda^n T^* M)$, s.t. $\text{supp}(\eta) \subset U_\alpha$, 有 $\eta \circ \phi_\alpha^{-1} = f \cdot dx_\alpha^1 \wedge dx_\alpha^2 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$. 若给定定向 dv , 使得 $dv|_{U_\alpha} = dx_\alpha^1 \wedge dx_\alpha^2 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$, 可定义 η 在流形 M 上的积分为

$$\int_M \eta := \int_{\mathbb{R}^n} f dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n \quad (2.3)$$

这个定义与定向的坐标卡变换无关. 所以在 $\mathbb{R}^n$ 上的多元微积分中, $dx^1 \cdots dx^n$ 应当解释为 $dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n$.

这里要注意的是, 积分的值取决于流形的定向, 即一个处处不为0的 n -形式的给定. 取反向的定向时, 积分值会差一个负号. 如果我们取流形的定向为 $dv|_{U_\alpha} = -dx_\alpha^1 \wedge dx_\alpha^2 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$, 则 $\int_M \eta := -\int_{\mathbb{R}^n} f dx_\alpha^1 \cdots dx_\alpha^n$. 习惯上, 除特殊情况外, 我们总假设 $dv|_{U_\alpha} = dx_\alpha^1 \wedge dx_\alpha^2 \wedge \cdots \wedge dx_\alpha^n$.

2.1.2 单位分解

本节我们将积分的定义推广到整个流形上. 推广定义需要用到一个从局部到整体的重要技巧, 即单位分解.

首先回忆一些点集拓扑中的知识. 若 M 为第二可数的, 那么 M 为仿紧的(paracompact), 即任意开覆盖有局部有限的加细. 局部有限是指, 对 $\forall x \in M$, 它只被有限个 U_α 覆盖. 本讲义中后面的内容, 若无特殊说明, 选取的坐标卡集合均为局部有限的.

定理 2.1.3 (单位分解定理). 对 $\forall$ 局部有限开覆盖 $\{U_\alpha\}$, $\exists$ 一族 M 上的光滑函数 $\{\psi_\alpha\}$, s.t. $\text{supp}(\psi_\alpha) \subset U_\alpha$, 且对 $\forall x \in M$, 有 $\sum_\alpha \psi_\alpha(x) = 1$.

证明. 取开覆盖 $\{V_\alpha\}$, s.t. 对 $\forall \alpha$, 有 $\overline{V_\alpha} \subset U_\alpha$. 可构造 $g_\alpha \in C^\infty(\phi_\alpha(U_\alpha), \mathbb{R})$, s.t. 对 $\forall \alpha$, 有 $\phi_\alpha(V_\alpha) \subset \text{supp}(g_\alpha) \subset \phi_\alpha(U_\alpha)$, $g_\alpha \geq 0$, 而且 $g_\alpha|_{\phi_\alpha(V_\alpha)} = 1$. 则 $g_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$ 是 U_α 上的光滑函数. 附加定义 $g_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}$ 在 $M \setminus U_\alpha$ 上为0, 则 $g_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1} \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. 定义 $g(x) := \sum_\alpha g_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1}(x)$. 由 g_α 非负且不恒为0, 有 $g > 0$. 因开覆盖局部有限, 有 g 取值有限, $g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$. 取 $\psi_\alpha := g_\alpha \circ \phi_\alpha^{-1} / g$. $\square$

对 n -形式 $\eta \in C^\infty(M, \Lambda^n T^*M)$, $\text{supp}(\eta)$ 为紧集, 其积分可定义为

$$\int_M \eta = \int_M \left(\sum_\alpha \phi_\alpha \right) \cdot \eta := \sum_\alpha \int_M \phi_\alpha \cdot \eta. \quad (2.4)$$

注: 单位分解不唯一, 我们需要验证积分的定义不依赖于开覆盖与单位分解的选取.

习题 2.1.4. 验证积分的定义不依赖于单位分解的选取.

若 $\beta \in \Omega^k(M)$, $k < n$, 定义 $\int_M \beta = 0$. 我们便可以将积分的定义扩展到 $\Omega^*(M)$ 上.

因为 M 可定向, 取定一个体积元 dv , 便可以对函数积分, 即对 $\forall f \in C^\infty(M)$, 定义 f 的积分为 $\int_M f dv$.

显然, 由积分的定义, 我们有

1. 对 $f, g \in C^\infty(M)$, $\int_M (f + g) dv = \int_M f dv + \int_M g dv$;
2. 对 $a, b \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \in \Omega^*(M)$, $\int_M (a\alpha + b\beta) = a \int_M \alpha + b \int_M \beta$.

我们本节的目标是证明之前提到过的Stokes公式:

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} i^* \omega, \quad (2.5)$$

其中 M 为带边流形, ω 为微分形式, ∂M 为 M 的边界, $i: \partial M \rightarrow M$, i^* 为拉回映射.

我们首先介绍Stokes公式中涉及到的概念。

2.1.3 带边流形

流形的原型是欧氏空间, 而带边流形的原型是欧氏空间中的上半平面。

对 $n \in \mathbb{N}^*$, 定义

$$\mathcal{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n \geq 0\} \quad (2.6)$$

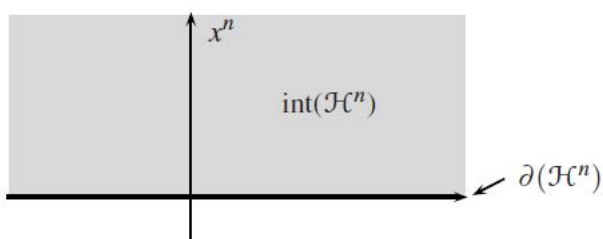
为 $\mathbb{R}^n$ 中的上半平面,

$$\partial\mathcal{H}^n := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n = 0\} \quad (2.7)$$

为 $\mathcal{H}^n$ 的边界,

$$\text{int}(\mathcal{H}^n) := \{(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n | x^n > 0\} \quad (2.8)$$

为 $\mathcal{H}^n$ 的内部。



作为拓扑空间 $\mathcal{H}^n$ 的子集, 上半平面中的开子集有两种: 一种与边界不相交, 即为 $\mathbb{R}^n$ 中的开子集; 另一种是和边界相交的开集。



定义 2.1.5. 设 M 是一个Hausdorff且第二可数的拓扑空间. 如果 M 上的每个点 $x \in M$ 都存在一个开邻域同胚于 $\mathcal{H}^n$ 的一个开子集, 我们称 M 是一个 n 维带边拓扑流形.

带边拓扑流形上的微分结构的定义与无边流形是完全类似的, 只是此时 $\mathbb{R}^n$ 开子集上的微分同胚 $\phi_{\beta\alpha}$ 被替换为 $\mathcal{H}^n$ 开子集上的微分同胚 $\phi_{\beta\alpha}$. 考虑到与边界相交的开集的情形, 我们需要定义 $\mathcal{H}^n$ 中开集之间的光滑映射: 对开集 $U \subset \mathcal{H}^n$, 映射 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^n$, 如果存在 $\mathbb{R}^n$ 中的开集 U' , $U \subset U'$, 及光滑映射 $f: U' \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得 $f'|_U = f$, 我们称 f 是光滑映射. 与无边流形类似, 我们简记带边光滑流形为带边流形。

由带边流形的定义可知, 若 M 是带边流形, ∂M 为无边流形(为什么?)。

例 2.1.6. 1. 若 M 是带边流形, 则 M 是无边流形。

2. $\mathcal{H}^n$ 是带边流形。

3. 闭区间 $[0, 1]$ 是带边流形。

4. 闭圆盘 $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq 1\}$ 为带边流形, 且 $\partial D^n = S^{n-1}$.

2.1.4 拉回映射与切映射

考虑光滑映射 $F : M \rightarrow N$. 对 N 上的光滑函数 $f \in C^\infty(N, \mathbb{R})$, 我们可以通过 F^* 将 f 拉回到 M 上, 使得 $F^*f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$: 对 $\forall p \in M$, 定义

$$(F^*f)(p) = f(F(p)) = f \circ F(p). \quad (2.9)$$

同样地, 我们也可以在微分上定义拉回:

$$F^*(df) = d(f \circ F).$$

设 (U, x^i) 为 $p \in M$ 附近的一个坐标卡, (V, y^j) 为 $q = F(p) \in N$ 附近的一个坐标卡, 满足 $y^j = F^j(x^1, x^2, \dots, x^m)$, $j = 1, 2, \dots, n$. 故

$$F^*(dy^j)(p) = d(y_j \circ F)(p) = \frac{\partial F^j}{\partial x^k}(p) dx^k. \quad (2.10)$$

所以 F 诱导了一个线性映射 $F^* : T_q^*N \rightarrow T_p^*M$,

$$F^*(a_j(p)dy^j) = a_j(p) \frac{\partial F^j}{\partial x^k}(p) dx^k. \quad (2.11)$$

类似于(2.9), 对 $s \in C^\infty(N, T^*N)$, 我们可以通过

$$(F^*s)(p) := F^*(s(q)) \in T_p^*M \quad (2.12)$$

定义线性映射 $F^* : C^\infty(N, T^*N) \rightarrow C^\infty(M, T^*M)$.

由(2.11), 通过

$$F^*(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) := F^*(v_1) \wedge \dots \wedge F^*(v_k), \quad (2.13)$$

我们可以定义线性映射 $F^* : \Lambda^k T^*N \rightarrow \Lambda^k T^*M$. 类比于(2.12), 我们可以定义线性映射 $F^* : C^\infty(N, \Lambda^k T^*N) \rightarrow C^\infty(M, \Lambda^k T^*M)$.

通过切丛与余切丛的对偶, 我们可以通过余切丛之间的拉回映射定义切丛之间的切映射. 我们定义线性映射 $F_* : T_pM \rightarrow T_qN$ 使得对 $\forall X \in T_pM, \alpha \in T_q^*N$, 有

$$\langle F_*X, \alpha \rangle = \langle X, F^*\alpha \rangle. \quad (2.14)$$

因双线性映射 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 非退化, 此定义是合理的(为什么?). 有时 F_*X 也记为 $dF(X)$, 称为切映射. 我们之前在曲面上学习过切映射. 这里的定义是曲面上的切映射的推广: 局部上, 由 (2.10),

$$\langle F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right), dy^j \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x^i}, F^*dy^j \right\rangle = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) = \left\langle \frac{\partial F^k}{\partial x^i}(p) \frac{\partial}{\partial y^k}, dy^j \right\rangle. \quad (2.15)$$

所以

$$F_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial F^j}{\partial x^i}(p) \cdot \frac{\partial}{\partial y^j}. \quad (2.16)$$

对 $\forall \alpha \in \Omega^k(N)$, 定义 $F^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ 为

$$F^*\alpha(X_1, X_2, \dots, X_k) = \alpha(F_*X_1, F_*X_2, \dots, F_*X_k).$$

习题 2.1.7. 若 $F : M \rightarrow N$ 是一个微分同胚, 证明 $F_*[X, Y] = [F_*X, F_*Y]$.

习题 2.1.8. 设 $F : M \rightarrow N$, $G : N \rightarrow P$ 均为光滑映射, 证明 $F^* \circ G^* = (G \circ F)^* : T^*P \rightarrow T^*M$, $G_* \circ F_* = (G \circ F)_* : TM \rightarrow TP$.

2.1.5 Stokes公式

设 M 为 m 维光滑带边流形, $i : \partial M \rightarrow M$ 为自然的嵌入映射. 因 M 可定向, ∂M 也是可定向的(为什么?). M 的一个定向诱导了 ∂M 上的一个定向: 若局部上 M 的定向由 $dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$ 给定, 则 ∂M 上诱导的定向由 $(-1)^n dx^1 \wedge \dots \wedge dx^{n-1}$ 给定.

定理 2.1.9 (Stokes公式). 对 $\forall \alpha \in \Omega^*(M)$, 有紧支集, 则

$$\int_M d\alpha = \int_{\partial M} i^*\alpha. \quad (2.17)$$

证明. 由积分的定义(2.4), 我们可以假设 $\text{supp}(\alpha)$ 属于某个坐标卡 U_α . 因若 $\alpha \in \Omega^k(M)$, $k \neq n-1$, $\int_M d\alpha = \int_{\partial M} i^*\alpha = 0$, 我们可以假设 $\alpha \in \Omega^{n-1}(M)$. 此时,

$$\alpha = \sum_{i=1}^n a_i(x) dx^1 \wedge \dots \widehat{dx^i} \wedge \dots \wedge dx^n, \quad (2.18)$$

$$d\alpha = \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n. \quad (2.19)$$

因 $i^*(dx^n) = 0$,

$$i^*\alpha = a_n(x)dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^{n-1}. \quad (2.20)$$

这时 U_α 作为带边流形的坐标卡有两种可能: $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset$ 与 $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$. 我们分类讨论.

第一种情况: $U_\alpha \cap \partial M = \emptyset$. 不妨设 $\phi_\alpha(U_\alpha)$ 在正方体 $C = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leq x^i \leq 1, i = 1, 2, \dots, n\}$ 的内部. 因 $\text{supp}(\alpha) \subset U_\alpha$, 我们可将 a_i 看作 C 上的光滑函数, 在 $\mathbb{R}^n \setminus \text{int}(C)$ 上取值为 0. 故

$$\begin{aligned} \int_M d\alpha &= \int_{\phi_\alpha(U_\alpha)} \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \cdots dx^n = \int_C \left(\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \frac{\partial a_i}{\partial x^i} \right) dx^1 \cdots dx^n \\ &= \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \int_0^1 \cdots \int_0^1 (a_i(x^1, \dots, x^{i-1}, 1, x^{i+1}, \dots, x^n) - a_i(x^1, \dots, x^{i-1}, 0, x^{i+1}, \dots, x^n)) \\ &\quad \cdot dx^1 \cdots \widehat{dx^i} \cdots dx^n = 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

另一方面, $i^*\alpha$ 在 ∂M 上为 0. 故 $\int_{\partial M} i^*\alpha = 0$.

第二种情况: $U_\alpha \cap \partial M \neq \emptyset$. 此时, 可设 $\phi_\alpha(U_\alpha) \subset \text{int}(C) \cup \{x \in \mathbb{R}^n : x^n = 0\}$. 由(2.21),

$$\int_M d\alpha = (-1)^n \int_0^1 \cdots \int_0^1 a_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}. \quad (2.22)$$

另一方面,

$$\int_{\partial M} i^*\alpha = \int_0^1 \cdots \int_0^1 (-1)^n a_n(x^1, \dots, x^{n-1}, 0) dx^1 \cdots dx^{n-1}. \quad (2.23)$$

故 $\int_M d\alpha = \int_{\partial M} i^*\alpha$. $\square$

例1: $M = [a, b] \subset \mathbb{R}^1$, $f \in C^\infty(M)$, 有

$$\int_a^b df = f(b) - f(a).$$

例2: $M \subset \mathbb{R}^2$ 为有界集, $f \in C^\infty(M)$, Green公式为

$$\int_{\partial M} (Pdx + Qdy) = \int_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

例3: $M \subset \mathbb{R}^3$ 为有界集, $f \in C^\infty(M)$, Gauss公式为

$$\int_{\partial M} (Pdydz + Qdzdx + Rdx dy) = \int_M \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

例4: $M \subset \mathbb{R}^3$ 为有向曲面, 那么

$$\int_{\partial M} (Pdx + Qdy + Rdz) = \int_M \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$